

C I B

**INTERNATIONAL COUNCIL FOR BUILDING
RESEARCH STUDIES AND DOCUMENTATION
STEERING GROUP S56 <LIGHTWEIGHT CONSTRUCTIONS>**

I A S S

**INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR
SHELL AND SPATIAL STRUCTURES**

**International Symposium on
Air Supported Structures**

organized by icite-cnr

**VENEZIA 13/18 JUNE 1977
FOUNDATION CINI**

INTERACTIVE COMPUTER AIDED DESIGN IN THE FIELD OF PNEUMATIC STRUCTURES.

M. MAJOWIECKI
Istituto di Tecnica
delle Costruzioni
Università di Bologna

G. TIRONI
Centro di calcolo
Facoltà di Ingegneria
Università di Bologna

ABSTRACT

In the current practice of planning of light spacial membranes (the weight of which is of about 1-3 kilos per sq. mt), several problems appear, which make this type of planning become very toilsome and expensive.

The first problem is represented by the research of the geometric shape that has to be given to the structural surface because the material which forms it, resisting only to traction stresses, can guarantee the stability and the resistance, further bearing in mind the fact that the geometry of the structural surface must also satisfy definite architectural requisites that have been previously fixed.

A preliminary process to fix the geometry to the structure is the one of the manufacture of models. But it is obvious that, as the attempts of project must be numerous, the manufacture of models would bring with itself remarkable and sometimes not acceptable times and costs. Further, this type of models can give a visual indication without giving any comfort for what refers to the tests of geometric idoneity, suitable to assure its static operation both in the condition of pre-stress and in the various steps of load.

The only convenient and quick method for the planning, both architectural and structural of this type of realizations is offered by electronic programmes inter-actively structured. These programmes permit, by means of the use of a calculator, supplied with a display graphics system, a quick, visual and amusing design.

When the interactive design has been finished, it is possible to obtain, by means of plotting, the visual geometric results on the screen : prospectives, prospects, as well as the necessary verifications.

In the first part of this work are reported the theoretic schematizations and the connections which rule the operation of the structure. In the second part, the automatic determination will be illustrated with numerous visualizations by means of the use of a "computer graphics display system".

SULLA PROGETTAZIONE INTERATIVA DELLE STRUTTURE PNEUMATICHE

PREMESSA

Nell'ultimo decennio si è potuto notare una larga diffusione nell'applicazione delle strutture pneumatiche quale coperture di impianti sportivi e industriali. Questa notevole affermazione commerciale non è sempre stata accompagnata da un omogeneo sviluppo della relativa tecnologia che presenta delicati problemi di progettazione e di verifica strutturale.

Nel campo della progettazione, per esempio, le forme geometriche adottate per la copertura spesso non sono quelle strutturalmente più idonee a sopportare la pressione interna.

Le forme geometriche più usate sono ottenute principalmente per via empirica partendo da cilindri, sfere e le loro possibili combinazioni. In questo modo si arriva a delle superfici che, sottoposte all'azione della pressione interna, manifestano zone di concentrazione di tensione e zone di piegatura del materiale che non ha la possibilità di ammettere degli sforzi di compressione. In queste ultime zone le curvature locali della superficie geometrica empiricamente defi

nità non permettono di soddisfare la condizione

$$n_{\min} = \frac{1}{2} (n_x + n_y \pm \sqrt{(n_x - n_y)^2 + 4t^2}) \geq 0 ,$$

che garantisce una distribuzione di tensioni positive su tutta la superficie della struttura pneumatica.

Con la presente nota si intende contribuire all'individuazione di geometrie strutturali pneumaticamente idonee.

La progettazione delle pneumostrutture viene affrontata con l'ausilio di macchine interattive quali il video display TEKTRONIX 4010. Programmi di calcolo (PNEUSS), anch'essi interattivi, sono stati strutturati in modo da permettere la preparazione automatica dei dati (PREPNE) e out put grafici (PNEUSS PLOT).

1. - SCHEMATIZZAZIONE DEL PROBLEMA (IL MODELLO DISCRETO)

Per ovviare agli inconvenienti di convergenza e alle difficoltà di formulazione delle condizioni al contorno del modello continuo, offerti dalle equazioni di equilibrio in regime di membrana di un elemento infinitesimo di superficie [5], è opportuno riferirsi ad un modello matematico basato su elementi discreti piani assemblati in modo da formare la superficie pneumatica equilibrata.

1.1. - L'elemento di superficie

Consideriamo un nodo generico $K \equiv (X_k; Y_k; Z_k)$ appartenente alla superficie di equilibrio e prendiamo in esame gli elementi triangolari che hanno un vertice in K (fig. 1).

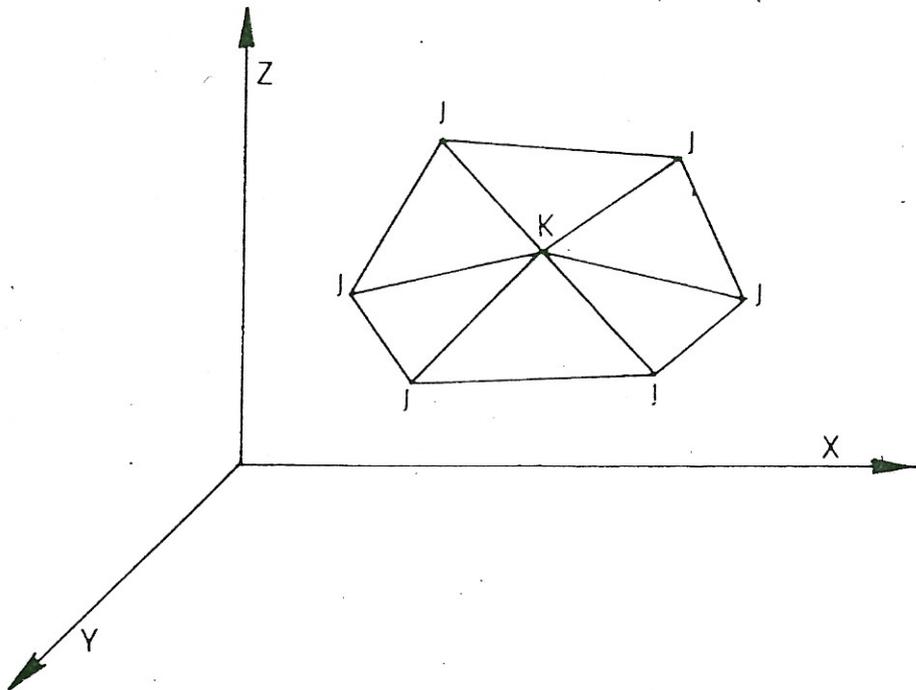


fig. 1

Di questi elementi ne isoliamo uno generico (1, 2, 3) fig. 2, riferito a coordinate locali. Si ipotizza che lo stato tensionale in esso sia costante.

Considerando le forze F_1 , F_2 e F_3 , staticamente equivalenti al campo di tensione costante, dirette secondo i lati del triangolo abbiamo che [2];

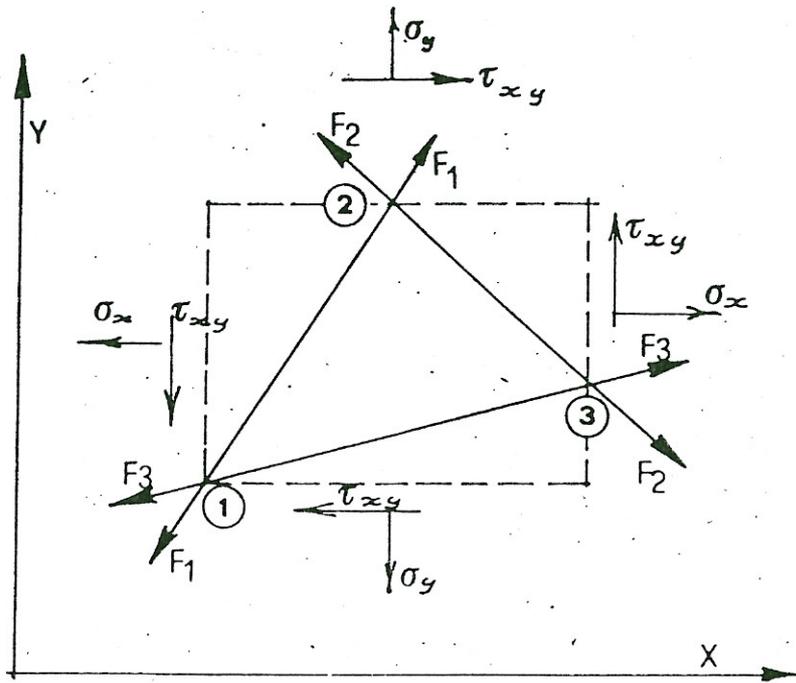


fig. 2

$$(1) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

dove:

$$(2) \quad [T] = \frac{2}{t} \begin{bmatrix} \frac{l_{12}^2}{h_3} & \frac{l_{23}^2}{h_1} & \frac{l_{31}^2}{h_2} \\ \frac{m_{12}^2}{h_3} & \frac{m_{23}^2}{h_1} & \frac{m_{31}^2}{h_2} \\ \frac{l_{12}^m m_{12}}{h_3} & \frac{l_{23}^m m_{23}}{h_1} & \frac{l_{31}^m m_{31}}{h_2} \end{bmatrix}$$

t = spessore della membrana

$h_1; h_2; h_3$ = altezze del triangolo misurate dai vertici 1, 2 e 3 rispettivamente

l_{KJ} ed m_{KJ} sono i coseni direttori del lato KJ .

La schematizzazione fatta considerando l'elemento a tensione costante permette di considerare il nodo generico K come sottoposto agli sforzi presenti in equivalenti aste fittizie concorrenti nel nodo.

E' perciò possibile considerare, a maggior ragione in questa fase di ricerca della superficie equilibrata dove, per la natura del procedimento, non si mette in gioco lo stato di dilatazione della struttura, un insieme fatto di nodi e fittizie aste, anzichè l'effettiva struttura continua.

La struttura equivalente che ne risulta è quindi una reticolare formata dai lati dei triangoli, e le aste sono formate dalla unione dei lati adiacenti dei triangoli.

Questa considerazione ci permette inoltre di risalire, dopo avere trovato le forze F e attraverso le (1), allo stato tensionale e quindi ad individuare le tensioni principali nel materiale continuo consistente l'involucro portante.

1.2. - I carichi

I carichi da considerare nella fase di determinazione della geometria (STATO "0"), sono quelli della pressione interna e del peso proprio della struttura.

Considerando che il rapporto tra di essi è di circa $1/30$ prendiamo in considerazione, per il momento, soltanto l'azione prevalente della pressione interna.

Per trovare i carichi staticamente equivalenti agenti sui nodi consideriamo l'elemento generico (KJ_1J_2) fig. 3, soggetto ad una forza applicata nel suo baricentro e diretta normalmente al piano che contiene il triangolo.

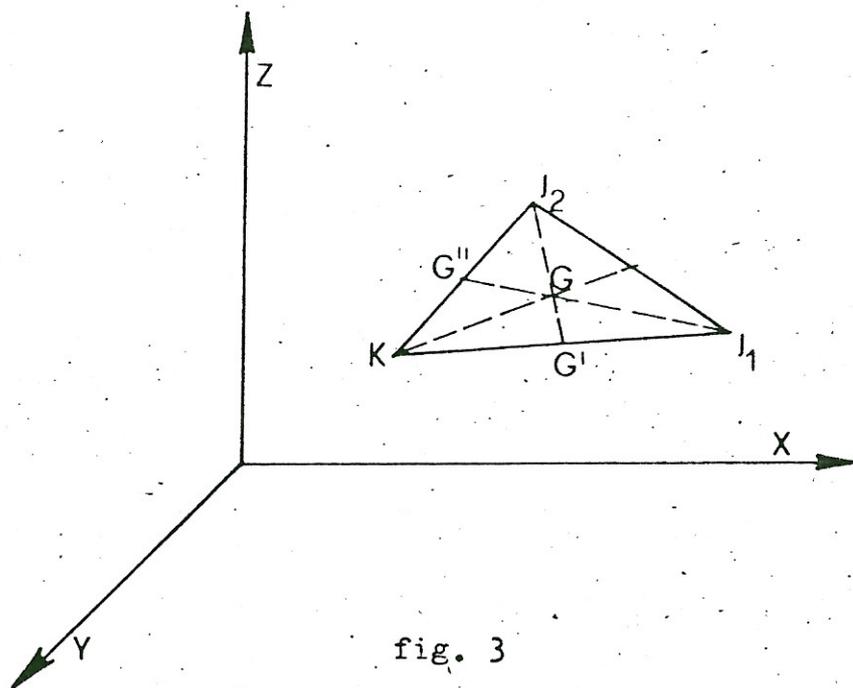


fig. 3

Le coordinate dei punti nodali sono:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} K \equiv (X_K; Y_K; Z_K) \\ J_1 \equiv (X_{J1}; Y_{J1}; Z_{J1}) \\ J_2 \equiv (X_{J2}; Y_{J2}; Z_{J2}) \end{array} \right.$$

le coordinate del baricentro sono date da:

$$(5) \quad G' \equiv \left\{ \begin{array}{l} X_{G'} = \frac{1}{2} (X_K + X_{J1}) \\ Y_{G'} = \frac{1}{2} (Y_K + Y_{J1}) \\ Z_{G'} = \frac{1}{2} (Z_K + Z_{J1}) \end{array} \right.$$

$$(6) \quad G'' \equiv \left\{ \begin{array}{l} X_{G''} = \frac{1}{2} (X_K + X_{J2}) \\ Y_{G''} = \frac{1}{2} (Y_K + Y_{J2}) \\ Z_{G''} = \frac{1}{2} (Z_K + Z_{J2}) \end{array} \right.$$

Considerando che l'area interessata dal carico equivalente agente nel nodo K sia l'area KGG'G'', questa sarà espressa dalla:

$$(7) \quad A_{KGG'G''} = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{d^2 + e^2 + f^2})$$

dove

$$a = \begin{vmatrix} Y_K & Z_K & 1 \\ Y_G & Z_G & 1 \\ Y_{G'} & Z_{G'} & 1 \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} Y_K & Z_K & 1 \\ Y_G & Z_K & 1 \\ Y_{G''} & Z_{G''} & 1 \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} Z_K & Y_K & 1 \\ Z_G & X_G & 1 \\ Z_{G'} & X_{G'} & 1 \end{vmatrix}$$

$$e = \begin{vmatrix} Z_K & X_K & 1 \\ Z_G & X_G & 1 \\ Z_{G''} & X_{G''} & 1 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} X_K & Y_K & 1 \\ X_G & Y_G & 1 \\ X_{G''} & Y_G & 1 \end{vmatrix}$$

$$f = \begin{vmatrix} X_K & Y_K & 1 \\ X_G & Y_G & 1 \\ X_{G''} & Y_{G''} & 1 \end{vmatrix}$$

I coseni direttori della normale al piano del triangolo sono

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_x = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \alpha_y = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \alpha_z = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{array} \right.$$

con

$$A = \begin{vmatrix} Y_K & Z_K & 1 \\ Y_{J1} & Z_{J1} & 1 \\ Y_{J2} & Z_{J2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} Z_K & X_K & 1 \\ Z_{J1} & X_{J1} & 1 \\ Z_{J2} & X_{J2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} X_K & Y_K & 1 \\ X_{J1} & Y_{J1} & 1 \\ X_{J2} & Y_{J2} & 1 \end{vmatrix}$$

2. - L'EQUILIBRIO DELL'INSIEME

Procedendo ad assemblare tutti gli elementi l'equazione di equilibrio, legame che risolve il nostro problema, è data vettorialmente dalla:

$$(9) \quad \sum_{j=1}^{NA} \bar{S}_{kj} = p \sum_{j=1}^{NA} \bar{n} A_{kj} \quad K = 1, N$$

dove

N = numero nodi interni;

NA = numero delle aste concorrenti nel nodo K ;

p = pressione interna ;

\bar{S}_{kj} = sforzi equivalenti diretti lungo i lati degli elementi formati dalla somma delle F di due lati adiacenti;

\bar{n} = versore della normale all'area generica di un elemento con vertice in K ;

A_{kj} = area dell'elemento generico con vertice in K .

In forma compatta associata al sistema di riferimento globale abbiamo:

$$(10) \quad [\bar{T}] \{S\} = \{P\}$$

dove

$[\bar{T}]$ = matrice dei coseni degli angoli formati dalle aste con gli assi coordinati del riferimento globale.

3. - IL PROCEDIMENTO NUMERICO

Per risolvere il sistema di equazioni che derivano dalla (10) è stato adottato un sistema iterativo basato sul metodo delle successive sostituzioni.

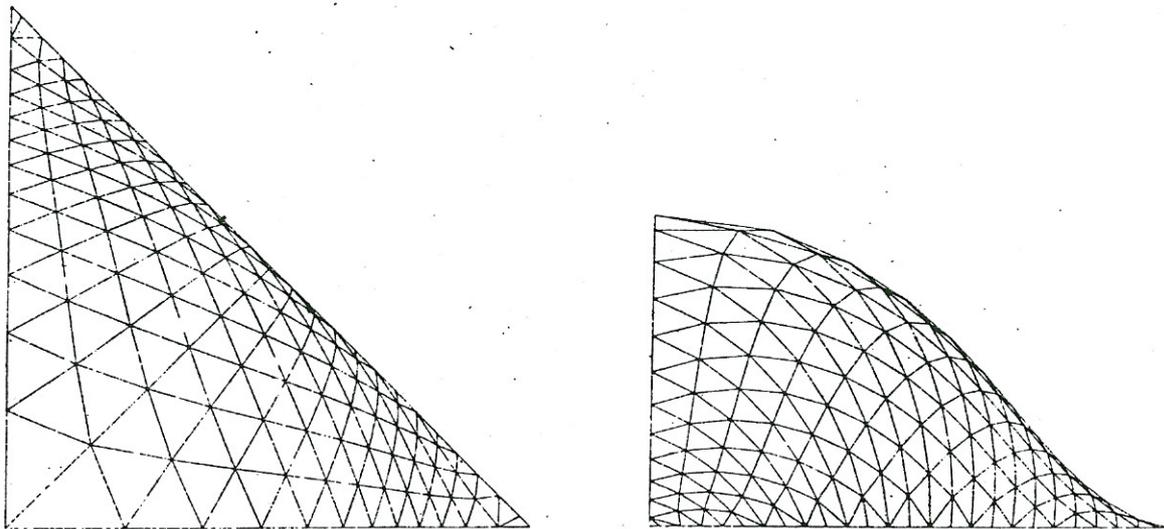
Dati i valori degli sforzi nelle aste fittizie è possibile risolvere un sistema di equazioni non lineari dove le incognite sono i valori delle coordinate dei nodi interni della struttura.

Consideriamo perciò di avere ottenuto in questa maniera i valori numerici delle seguenti grandezze:

| | |
|--------------------------------|------------------------------|
| $P_k^o \equiv (X_k; Y_k; Z_k)$ | coordinate dei nodi interni |
| S_{kj}^o | sforzo nell'asta fittizia kj |
| L_{kj}^o | lunghezza dell'asta kj |

Questo primo risultato, specialmente nella ricerca geometrica delle strutture pneumatiche, non soddisfa le richieste di progetto. Infatti, per strutture con contorno rettangolare, le altezze ottenute in prossimità degli angoli

sono molto scarse e perciò il risultato ottenuto manca di in
teresse applicativo reale. (fig. 4)



pianta

sezione

fig. 4

Per ovviare a questi inconvenienti dovremmo, a parte le condizioni di equilibrio, introdurre degli ulteriori vincoli di progetto.

Il problema da risolvere si presenta in questi termini:

- a) Si deve trovare una nuova superficie equilibrata e perciò dei nuovi valori di $P_k^F \equiv (X_k^F; Y_k^F; Z_k^F)$.
- b) La superficie sarà soggetta a dei vincoli di progetto qua
li:

- valori prestabiliti di L_{ki}^F (vincolo non lineare)
- " " " S_{kj}^F (" lineare)
- " " " $X_k^F; Y_k^F; Z_k^F$ (vincolo lineare)

c) La scelta tra le infinite superfici ottenibili con i vincoli suddetti verrà condizionata da una funzione obiettivo. Questa funzione obiettivo, in genere non lineare, ha il compito di farci trovare una superficie la più prossima possibile compatibilmente con i vincoli, alla superficie desiderata in fase di progetto.

Il problema suggerisce una risoluzione mediante un meccanismo automatico di ottimizzazione nella ricerca della superficie finale di progetto.

Si ha così:

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{variabili: } [X^F, Y^F, Z^F, S^F] \\
 \text{vincoli: } g(X^F, Y^F, Z^F, S^F) = 0 ; S > 0 \\
 \text{funzione obiettivo: } F = \sum_1^n C_1 (X_k^F - X_k^0)^2 + (Y_k^F - Y_k^0)^2 + (Z_k^F - Z_k^0)^2 + \\
 \qquad \qquad \qquad + \sum_1^m C_2 (S_{ki}^F - S_{ki}^0)^2 \longrightarrow \min
 \end{array} \right.$$

C_1 e C_2 sono coefficienti di penalizzazione e danno un peso proporzionale al desiderio di ottenere una determinata soluzione dove prevalgono le condizioni geometriche o tensionali.

I vincoli sono rappresentati dalle condizioni di equilibrio (10).

Il numero di queste condizioni è $3n$, dove n è il numero dei nodi interni.

Altri vincoli aggiuntivi possono essere dati come:

- condizioni sugli sforzi

$$(11) \quad S_{ki}^F = \text{cost.}$$

- condizioni sulle lunghezze

$$(12) \quad L_{ki}^F = \text{cost.}$$

dove

$$(13) \quad L_{ki}^F = \sqrt{\Delta^F X_{ki}^2 + \Delta^F Y_{ki}^2 + \Delta^F Z_{ki}^2}$$

- condizioni sulle coordinate dei nodi

$$(14) \quad X_k^F = \text{cost} ; \quad Y_k^F = \text{cost} ; \quad Z_k^F = \text{cost.}$$

oppure

$$(15) \quad \frac{\Delta^F Z_k}{\Delta^F X_k} = \text{cost}$$

Queste ultime condizioni si sono dimostrate di notevole utilità nella progettazione di strutture con vincoli rigidi di volumetria e altezze utili interne.

La funzione obiettivo ha il compito di minimizzare il

divario tra la superficie equilibrata pneumaticamente ammissibile (F) e quella di progetto preliminare (O).

In conclusione si devono trovare $3n+m$ incognite date delle $3n$ coordinate dei nodi (k) e dagli m sforzi nelle aste (k_i).

4. - LA PROGETTAZIONE INTERATTIVA - ESEMPI NUMERICI

La tecnica interattiva di calcolo assume particolare importanza nella progettazione delle strutture pneumatiche. I particolari vantaggi, principalmente nel risparmio di tempo e costi di progettazione, possono essere elencati illustrando il diagramma a blocchi di fig. 5.

Il cuore della struttura interattiva del programma di calcolo risiede nel blocco di controllo dei comandi interattivi.

Immessi i dati fissi (es. coordinate dei punti di ancoraggio), che possono provenire da un programma di generazione automatica, da memorie periferiche o semplicemente da schede ed i dati parametrici che servono ad attivare una precisa sequenza di calcolo, è possibile ottenere un primo risultato su video (blocco A).

Sul video è possibile controllare immediatamente da un semplice esame visivo la correttezza dei dati. In questo caso basta fermare il calcolo alle prime iterazioni e, se il risultato è negativo, mediante il blocco C, è possibile modificare i dati sbagliati e ripartire con il calcolo.

Raggiunto l'equilibrio con i dati preliminari si esami-

na la struttura pneumatica sul video dove si possono visualiz-
zare prospetti ed assonometrie. Mediante il blocco B si pos-
sono eseguire rotazioni, traslazioni e cambiamenti di scala
permettendo una prima precisa valutazione progettuale, dal
punto di vista geometrico. Con il blocco E è possibile, sem-
pre sul video, ottenere informazioni sulla precisione raggiun-
ta e sui valori degli sforzi nella membrana.

Concluso l'esame del primo risultato completo (geometria-
stato di sollecitazione) è possibile:

- cambiare dei dati come la pressione interna, coordinate dei
punti di vincolo, sforzi iniziali, ecc.;
- conservare su periferico i risultati ottenuti per eventua-
li utilizzi successivi quali base di procedimento automati-
co di ottimizzazione (blocco D);
- ottenere i risultati su plotter, hard copy (grafico finale)
e su stampante (blocco F).

Nel caso che venga richiesta una sequenza di ottimizza-
zione si devono eseguire delle modifiche dei parametri e su-
cessivamente ordinare il proseguimento del calcolo.

Da quanto sopra risulta evidente la notevole economia
della organizzazione interattiva di progetto mediante l'ausi-
lio di macchine veloci che costituiscono una estensione men-
tale operativa del progettista aumentando enormemente la sua
capacità e la qualità del progetto.

Le tipiche fasi di progettazione e successiva verifica
sono enormemente accelerate anche in confronto al normale im-
piego del calcolatore come strumento di input-output.

Nella fig. 6 si può osservare una sequenza interattiva
di progetto per una struttura pneumatica di 50 m di luce li-

bera e 150 m di lunghezza.

Ogni 15 m è stata disposta una fune in modo da diminuire le sollecitazioni nella membrana.

La superficie della struttura è stata ottenuta introducendo vincoli geometrici in modo da ottenere che i campi interni, meno le due testate, fossero uguali con la conseguente economia di realizzazione.

Un altro esempio viene illustrato in fig. 7 dove si possono osservare piante, prospetti ed assonometrie della soluzione di tentativo e della soluzione ottimizzata introducendo vincoli geometrici. La sequenza di ottimizzazione tende alla ricerca della superficie pneumatica più vicina all'intersezione di due cilindri a direttrice ellittica.

Una subroutine ploterizza automaticamente le sagome di tessuto che unite formeranno la superficie non sviluppabile delle strutture progettate in fase esecutiva.

BIBLIOGRAFIA

- [1] TROSTEL R., OTTO F., "Zugbeanspruchte Konstruktionen"
Vol. 1. Ullstein Verlag Frankfurt, 1962.
- [2] PREZEMIENIECKI J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis"
McGraw-Hill, 1968.
- [3] GRUENDIG L., SCHEK H.L., Analytical "Form Finding and
Analysis of Prestressed Cable Networks", Int. Conferen-
ce of Tension Roof Structures, London, 1974.
- [4] KAZUO ISHII, "Analytical Shape Determination for Membra
ne Structures". Iass World Congress on Space Enclosures
(W-Cose 76) Montreal, 1976.
- [5] MAJOWIECKI M., TIRONI G., "Geometrical Configuration of
Pneumatic and Tent Structures Obtained with Interactive
Computer Aided Design", Iass Worlds Congress on Space
Enclosures (W-Cose) Montreal, 1976.

DIAGRAMMA BLOCCHI

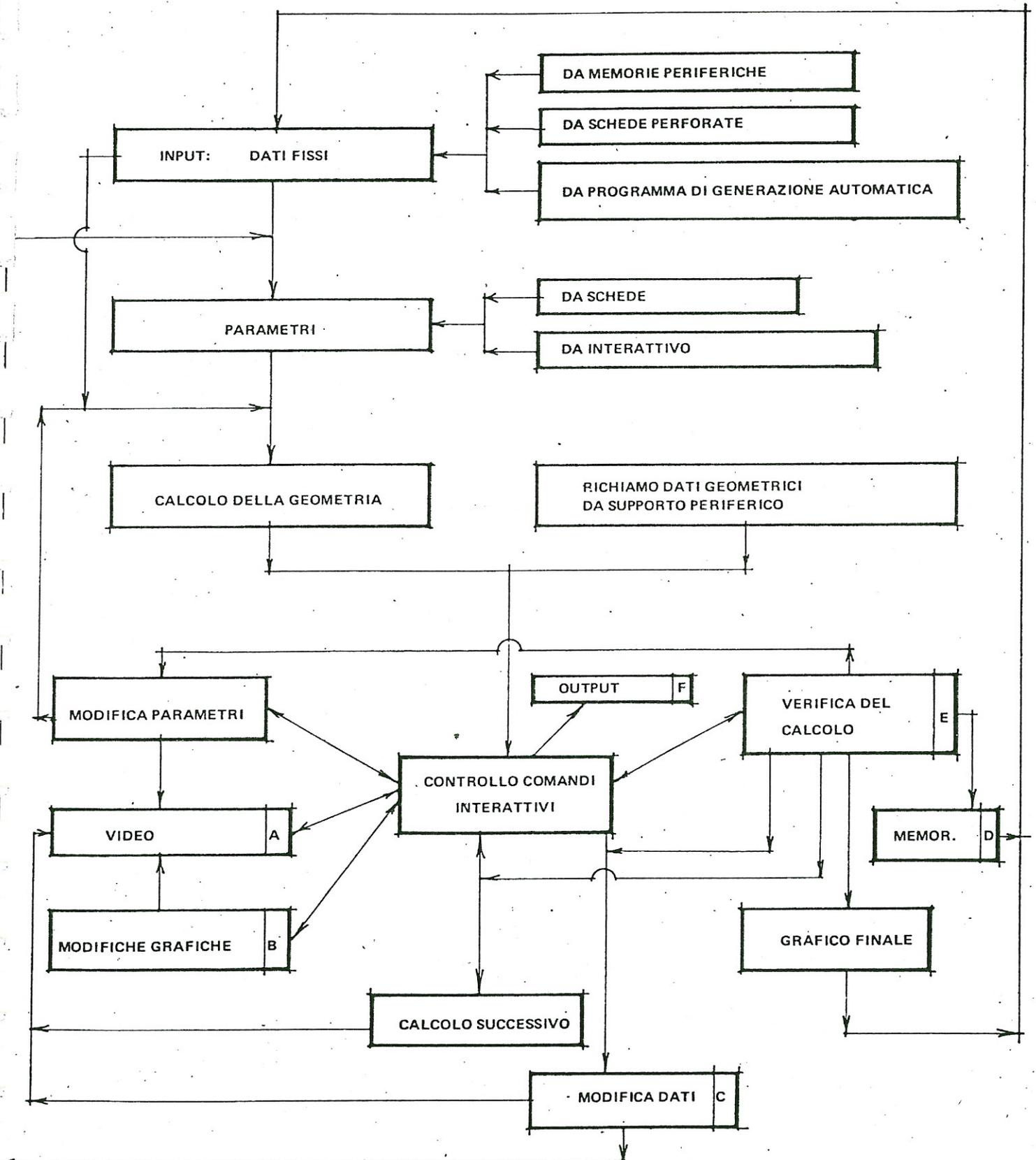


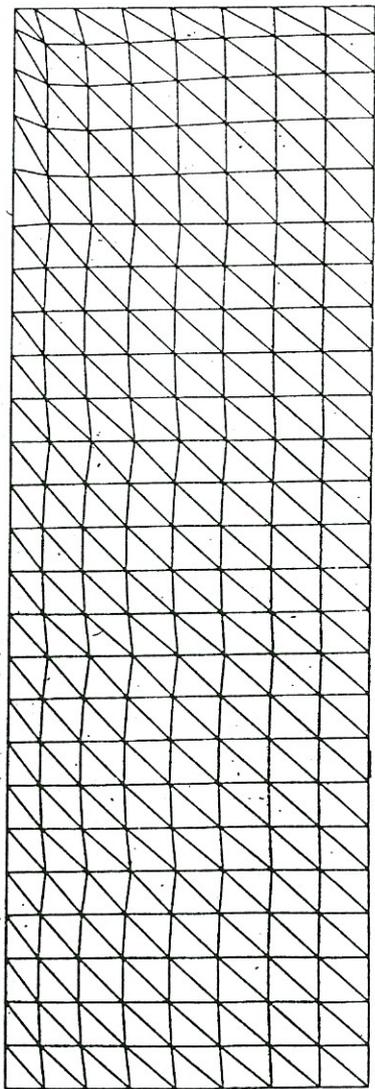
Fig. 5



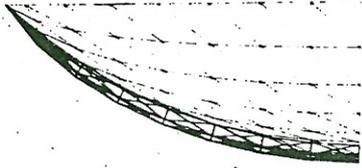
FIG. 6 - Visualizzazione di una fase iterattiva di calcolo
mediante video display graphics TEKTRONIX 4010.

In alto: prospetto alla 5^a iterazione. Si noti le condizioni
di vincolo sulla geometria in corrispondenza delle
funi cerchiati.

In basso: visualizzazione parziale assonometrica.

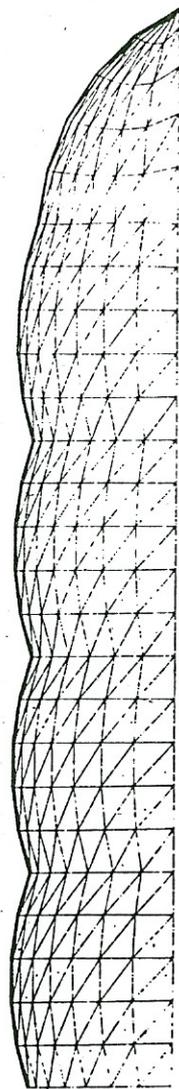


PIANTA

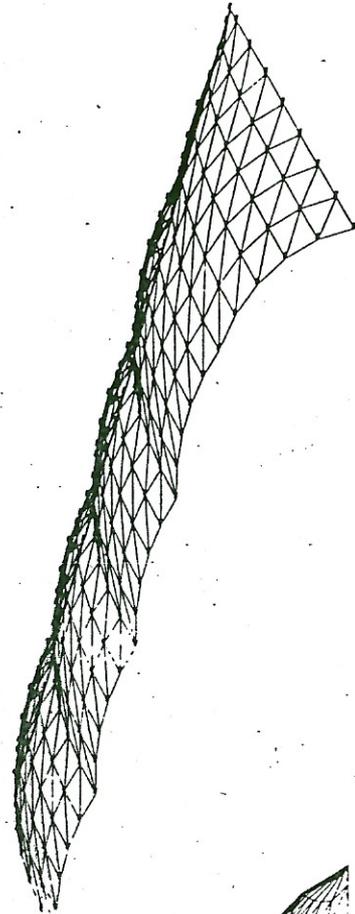


PROSPETTO

Fig. 6 Bis

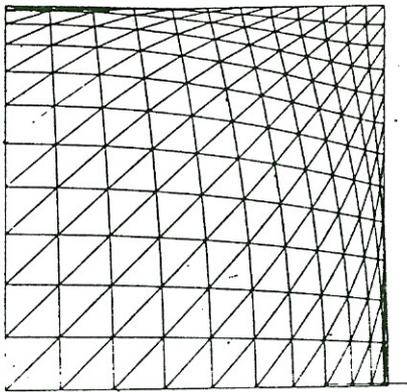


PROSPETTO

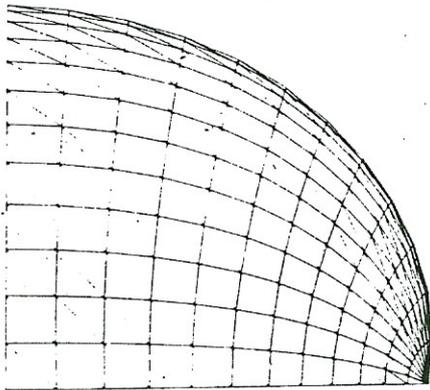


ASSONOMETRIA

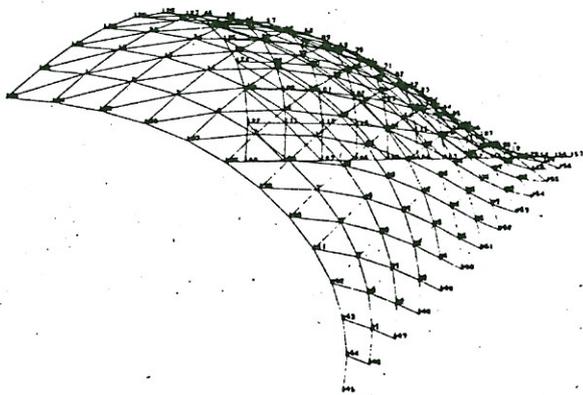
SOLUZIONE DI TENTATIVO



PIANTA

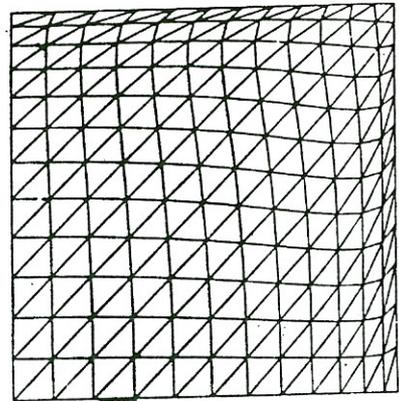


VISTA LATERALE

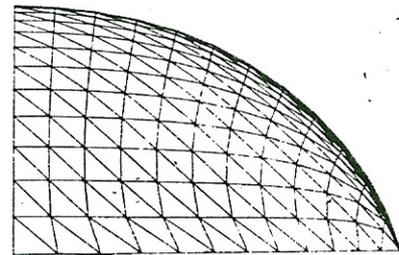


ASSONOMETRIA

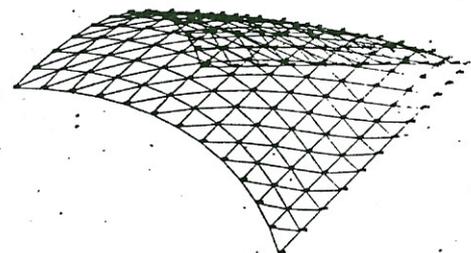
SOLUZIONE OTTIMIZZATA



PIANTA



VISTA LATERALE



ASSONOMETRIA

Fig. 7